LIBRIS We know books

Marius Burtea Georgeta Burtea

Ana Mihaela Alexa, Manuela Apostol, Gina Avădanei, Geta Bercaru, Cătălin Bîrzescu, Luminița Bolohan, Dorina Boroș, Daniela Calistrate, Gheorghe Cap, Luminița Caragea, Gabriela Cîmpeanu, Teodora Comșa, Silvia Costin, Ștefan Cristescu, Constantin Dinu, Costel Dumitrescu, Laura Dumitru, Mădălina Enache, Ionuț Georgescu, Doina Grădinaru, Titi Hanghiuc, Gabriel Hura, Simona Ionescu, Cristina Lemnaru, Cristina Magirescu, Liliana Marin, Simona Măgureanu, Monica Nartea, Claudia Oleniuc, Teodor Pescăruș, Daniela Podumneacă, Aura-Loreta Pogorevici, Gheorghe Popa, Mihai Popeangă, Vasile Popescu, Diana Radu, Georgiana Rusen, Iuliana Scutariu, Doina Sandu, Eugenia Stan, Olimpia State, Laurențiu Tătaru, Agelica Ungureanu, Mihaela Ursaciuc

MATEMATICĂ

CLASA a XI-a

Filiera tehnologică
servicii, resurse, tehnic

CAMPION

LIBRIS | We know books

CUPRINS

Capitolul I. MATRICE 5
1. Matrice. Egalitatea matricelor. 5
2. Operaţii cu matrice 10
Teste de evaluare 17
Capitolul II. DETERMINANŢI 18
1. Determinantul unei matrice pătratice de ordinul cel mult 3. Proprietăţi 18
2. Aplicaţii ale determinanţilor în geometrie 23
2.1. Ecuaţia dreptei prin două puncte. Coliniaritate. 23
2.2. Aria unei suprafeţe triunghiulare 27
Teste de evaluare 31
Capitolul III. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE 33
1. Matrice inversabile 33
2. Ecuaţii matriceale 39
3. Sisteme de ecuaţii liniare cu cel mult 3 necunoscute. Forma matriceală. 42
4. Metode de rezolvare a sistemelor liniare 45
4.1. Metoda lui Cramer 45
4.2. Metoda lui Gauss 49
Teste de evaluare 52
PROBLEME RECAPITULATIVE. Algebră 53
Elemente de analiză matematică 57
Capitolul I. LIMITE DE FUNCŢII 57
1. Noţiuni elementare despre mulţimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire, vecinătăţi 57
2. Limita unei funcţii într-un punct. Limite laterale 62
3. Limitele funcţiilor elementare 66
4. Operaţii cu limite de funcţii 72
5. Cazuri exceptate în calculul limitelor de funcţii 78
6. Asimptotele graficului funcţiilor reale 83
Teste de evaluare 88
Capitolul II. FUNCŢII CONTINUE 89
1. Funcţii continue într-un punct 89
2. Operaţii cu funcţii continue 94
3. Semnul unei funcţii pe un interval. Aplicaţii 98
Teste de evaluare 105
Capitolul III. FUNCŢII DERIVABILE 106
1. Derivata unei funcţii într-un punct. Interpretare geometrică 106
2. Derivabilitate şi continuitate. Derivate laterale 109
3. Derivatele funcţiilor elementare 113
4. Operaţii cu funcţii derivabile 116
5. Derivarea funcţiilor compuse 121
6. Derivata de ordinul doi a unei funcţii 126
7. Regulile lui L'Hospital 129
Teste de evaluare 132
Capitolul IV. Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor 134
1. Rolul derivatei întâi în studiul funcţiilor 134
2. Rolul derivatei a doua în studiul funcţiilor 138
3. Reprezentarea grafică a funcţiilor 141
Teste de evaluare 145
PROBLEME RECAPITULATIVE. ANALIZĂ MATEMATICĂ 146
INDICAŢII ŞI RASPUNSURI 150
Bibliografie 192

LIBRIS We know books

Capitolul I

MATRICE

1 MATRICE. EGALITATEA MATRICELOR.

Breviar teoretic

- Se numeşte **matrice** de tipul (m,n) sau matrice cu m linii şi n coloane cu elemente din mulţimea $\mathbb{C}$, o funcţie $A:\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}\to\mathbb{C}$, dată de relaţia $A(i,j)=a_{ij}$.
- Numerele $a_{ij}\in\mathbb{C}$ se numesc **elementele** matricei.
- Matricea de tipul (m,n) se reprezintă sub forma unui tabel dreptunghiular cu m linii şi n coloane.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Matricea de tipul $(m,1)$ se numeşte *matrice linie*, iar matricea de tipul $(1,n)$ se numeşte *matrice coloană*.
- Dacă $m=n$ matricea A este matrice pătratică de ordinul n.
- Matricele $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ sunt egale dacă $a_{ij}=b_{ij},\ \forall i\in\{1,2,...,m\},\ j\in\{1,2,...,n\}$.
- Egalitatea matricelor are proprietăţile:
  - $A=A,\ \forall A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ – reflexivitatea
  - $A=B\Rightarrow B=A,\quad \forall A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ – simetria
  - $A=B,\ B=C\Rightarrow A=C,\quad \forall A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ – tranzitivitatea
- Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ se notează cu $\mathrm{Tr}(A)=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ **urma** matricei A.

Sistemul ordonat de numere $(a_{11},a_{22},...,a_{nn})$ formează diagonală principală, iar sistemul $(a_{1n},a_{2,n-1},...,a_{n1})$ formează diagonala secundară a matricei A.

Exerciţii şi probleme **rezolvate**

1. Se dau matricele:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Să se precizeze tipul fiecărei matrice.
b) Să se scrie elementele de pe linia a doua a matricelor A, B şi C.
c) Să se calculeze suma elementelor primei coloane în fiecare matrice.
d) Calculaţi: $x=a_{22}^{\ 2}+b_{23}^{\ 2}+c_{31}^{\ 2}+d_{13}+d_{14}$.

Soluţie

LIBRIS

a) Avem că $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $C \in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $D \in M_{1,4}(\mathbb{R})$.

b) Se obţin elementele: -1, 5, pentru matricea A; 3, 0, -1, pentru matricea B; 1, pentru matricea C. c) Se obţin sumele $a_{11}+a_{21}=4+(-1)=3$, $b_{11}+b_{21}=1+3=4$, $c_{11}+c_{21}+c_{31}=5+1+0=6$ şi $d_{11}=-1$. d) $x=5^2+(-1)^2+0^2+3+2=31$.

2. Se consideră matricele: $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

a) Să se scrie elementele de pe diagonala principală a matricei A şi de pe diagonala secundară a matricei B.

b) Să se determine valoarea lui $x \in \mathbb{R}$, ştiind că $(a_{13}+b_{22})x+a_{31}{}^3+b_{32}{}^3=\left[\mathrm{Tr}(A)-\mathrm{Tr}(B)\right]^2$.

Soluţie a) Elementele diagonalei principale şi ale diagonalei secundare sunt $a_{11}=3$, $a_{22}=3$, $a_{33}=1$, respectiv $b_{13}=1$, $b_{22}=3$, $b_{31}=0$.

b) Urmele matricelor sunt: $\mathrm{Tr}(A)=a_{11}+a_{22}+a_{33}=3+3+1=7$, $\mathrm{Tr}(B)=b_{11}+b_{22}+b_{33}=$ $=1+3+3=7$. Se obţine ecuaţia $4x+1=0$, cu soluţia reală $x=-\frac{1}{4}$.

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}4-x & 3+a\\ 2b & -5-c\end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Să se determine valorile parametrilor a, b, c, x pentru care A este matrice nulă.

b) Există valori a, b, c, x pentru care $A=I_2$?

Soluţie a) Matricea A este matrice nulă dacă $4-x=0$, $3+a=0$, $2b=0$ şi $-5-c=0$. Rezultă că $x=4$, $a=-3$, $b=0$ şi $c=-5$. b) Matricea $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Se obţin ecuaţiile $4-x=1$, $3+a=0$, $2b=0$ şi $-5-c=1$, cu soluţiile $x=3$, $a=-3$, $b=0$ şi $c=-6$.

4. Să se determine valorile parametrilor $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care matricele $A=\begin{pmatrix}2+x & 3\\ 5-x & 4+y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5x+6 & 2y-3\\ 2y & 10-y\end{pmatrix}$ sunt egale.

Soluţie Din egalitatea $a_{11}=b_{11}$ rezultă ecuaţia $2+x=5x+6$, cu soluţia $x=-1$. Din egalitatea $a_{22}=b_{22}$ se obţine ecuaţia $4+y=10-y$ cu soluţia $y=3$. Se obţine că $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 6 & 7\end{pmatrix}$, deci $A=B$.

5. Să se determine numerele reale pentru care are loc egalitatea de matrice:

$$\begin{pmatrix}x^2+x & 2^m\\ C_n^2 & \log_2(y+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2^{2m-1}\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$

Soluţie

Se obţin egalităţile: $x^2+x=2$; $2^m=2^{2m-1}$; $C_n^2=3$ şi $\log_2(y+1)=3$. Ecuaţia $x^2+x=2$ se scrie sub forma $x^2+x-2=0$ şi are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-2$.

LIBRIS | Weknow books

Din egalitatea $2^m = 2^{2m-1}$ se obține că $m = 2m-1$ sau $m = 1$.

Folosind formulele combinărilor $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$ se obține succesiv: $C_n^2 = 3$ sau $\frac{n!}{(n-2)!\,2!} = 3$ sau $\frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!\,1\cdot 2} = 3$. După simplificări rezultă ecuația $\frac{n(n-1)}{2} = 3$, sau $n^2 - n - 6 = 0$ cu soluțiile $n = 3$ și $n = -2$. Deoarece $n \in \mathbb{N}^*$, soluția căutată este $n = 3$.

Ecuația $\log_2(y+1) = 3$ se scrie sub forma $y+1 = 2^3$ și are soluția $y = 8-1 = 7$.

În concluzie obținem că $x = 1$, $m = 1$, $n = 3$, $y = 7$ sau $x = -2$, $m = 1$, $n = 3$, $y = 7$.

Exerciții și probleme propuse

Exersare

1. Să se scrie:

a) matricele $A \in M_{2,3}(\mathbb{Z})$, $B \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$, $C \in M_{2,1}(\mathbb{C})$;

b) o matrice linie cu trei coloane;

c) o matrice coloană cu două linii;

d) matricea unitate de ordinul 4;

e) matricea nulă de tipul $(2,3)$.

2. Fie matricea: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 8 \\ 7 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. Să se calculeze:

a) $Tr(A)$; b) $a_{21} - a_{32} + 2a_{43}$; c) $a_{13} + a_{22} - a_{41}^2$.

3. Fie matricele: $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \\ -2 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ i \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -7 & \sqrt{5} & -i & 2 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

a) Să se precizeze tipul matricelor;

b) Să se completeze: $a_{21} = \ldots$, $b_{12} = \ldots$, $c_{31} = \ldots$, $d_{14} = \ldots$, $d_{15} = \ldots$,
$\sqrt{3} = \ldots$, $i = \ldots$, $-i = \ldots$, $5 = \ldots$,

c) Să se calculeze:

- $Tr(A) - a_{11}^2 + a_{12}$;
- $a_{21} - b_{31} + c_{41}^2 - d_{12}^2$;
- $b_{21} - c_{31}^3 - d_{13}$.

4. Să se determine parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ știind că $\begin{pmatrix} a+5 & 3 \\ a^2 - 42 & b^2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Să se determine necunoscutele $x, y, z, t, u, v \in \mathbb{C}$ știind că matricea $A = \begin{pmatrix} x+2 & 0 & y \\ z^2+1 & 2u & 5y \\ 0 & 5v^3 & t^2 \end{pmatrix}$ este matricea unitate de ordinul 3.

LIBRIS | We know books

6. Știind că matricea $A=\begin{pmatrix} x^2-3x & 2y-6 \\ y^2-9 \end{pmatrix}$ este matricea nulă de tipul $(1,3)$, să se determine $x,y\in\mathbb{R}$.

7. Să se scrie toate matricele de tipul $(3,1)$ care au elementele a sau b.

8. Determinați numărul matricelor de tipul $(2,2)$ care au elementele egale cu $-1,0$ sau 1.

9. Determinați numărul matricelor de tipul $(3,4)$ care au elementele egale cu 4 sau -4.

10. Să se determine $x,y\in\mathbb{N}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} x & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & y \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Să se determine $x,y\in\mathbb{Z}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} -3 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

12. Să se determine $x,y\in\mathbb{Q}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} \frac{x}{2} & 5y \\ -4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & \frac{6}{x} \end{pmatrix}$.

13. Să se determine $x,y\in\mathbb{N}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} x+2 & 1 \\ 3 & y-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{4} & 1 \\ x+3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} a+1 & b-2 \\ c-1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-1 & c \\ 3^2 & a-2 \end{pmatrix}$.

15. Să se determine $a,b,c\in\mathbb{R}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} 3a+2 & 4 \\ 8 & b-1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 4 \\ 8 & \sqrt{3} \\ 0 & 3c \end{pmatrix}$.

16. Să se determine $u,v\in\mathbb{C}$ din egalitatea $\begin{pmatrix} u & 3+i \\ 3-i & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+i & 3+i \\ v & -i^2 \end{pmatrix}$.

17. Să se afle $x,y\in\mathbb{R}$ dacă matricele A și B sunt egale, unde $A=\begin{pmatrix} 2x-1 & 6 \\ 3 & 3y+2 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 4+y & 6 \\ 3 & x+2 \end{pmatrix}$.

Aprofundare

18. Fie matricea $A\in M_3(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix} 3^x & -1 & \log_3^2(y-1) \\ 2 & -3 & 9^x \\ \log_3(y-1) & \sqrt{z+1} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Determinați valorile lui x pentru care $Tr(A)=6$;

b) Pentru ce valori ale lui x avem $a_{11}+a_{23}\le a_{21}$?

c) Pentru ce valori ale lui y avem $a_{13}-a_{31}-a_{21}=0$?

d) Dterminați valorile lui z astfel încât $a_{32}=a_{21}$.

19. Determinați $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ din egalitatea matricelor $\begin{pmatrix} \sin 30^\circ & \beta \\ \gamma & \cos 30^\circ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \operatorname{tg} 30^\circ & \sqrt{\frac{3}{4}} \end{pmatrix}$.

20. Determinați numerele reale x,y,z și t dacă :

LIBRIS We know books

a) $\begin{pmatrix} C_5^2-17 & 2^y-5 \\ \log_3 z+2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} x-2 & y-1 & 0 \\ x-3 & y & z \\ t+1 & 0 & z+1 \end{pmatrix}=I_3$;

c) $\begin{pmatrix} x^2 & y^2 & 1+t^2 \\ y+2 & z-1 & x+6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} x^2-x-2 & y^2+x-1 \\ z^2-y^2+x & t^2+x \end{pmatrix}=O_2$;

e) $\begin{pmatrix} e^{3x+2} & z^2-z \\ \lg(2y+1) & 1 \end{pmatrix}=I_2$.

21. Se dă matricea $M=\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ x & 4^y \end{pmatrix}$. Aflaţi $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $M=I_2$.

22. Dacă $N=O_2$, unde $N=\begin{pmatrix} \log_3(x+1) & \log_3(y-1) \\ 0 & \log_3 1 \end{pmatrix}$, să se determine numerele reale x şi y.

23. Determinaţi numărul real x astfel încât următoarele matrice să fie antisimetrice: (marticea pătratică A este antisimetrică dacă $A=-{}^tA$)

a) $A=\begin{pmatrix} \ln(1+x+x^2) & x \\ x+2 & 0 \end{pmatrix}$; b) $B=\begin{pmatrix} \sin x & -1 & 2 \\ 1 & -\sin x & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

24. Să se determine matricele $X=\begin{pmatrix} v & w \\ -w & v \end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ ştiind că are loc egalitatea

$$\begin{pmatrix} v^2-w^2+13 & 2vw \\ -2wv & 13-w^2+v^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4v & 4w \\ -4w & 4v \end{pmatrix}.$$

25. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} \sqrt[3]{x} & -2 \\ 3 & \sqrt{y} \\ z & 2 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 2 & -|2| \\ |-3| & \frac{1}{2} \\ \sqrt[3]{8} & \log_3 9 \end{pmatrix}$. Ştiind că $A=B$ determinaţi $x,y,z\in\mathbb{R}$.

26. Determinaţi elementele necunoscute din egalitatea matricelor

$$\begin{pmatrix} (x+1)! & 4 \\ 3 & (y-1)! \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot(x-1)! & 4 \\ y^2-1 & 1 \end{pmatrix}.$$

27. Să se determine elementele necunoscute din egalitatea de matrice

$$\begin{pmatrix} 3^{x+1}\cdot 2^x & C_n^1+A_n^2 \\ 3! & \cos 60^\circ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 108 & 4 \\ y+C_4^2 & 2z \end{pmatrix}.$$

28. Se dau matricele $A=\begin{pmatrix} -8 & a+b \\ a-b & 1+y \\ 10^{\lg 7}-\sqrt[3]{343} & x \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 4^x-6\cdot 2^x & 3 \\ 1 & \sqrt[3]{1-y} \\ c & \sqrt{2-x} \end{pmatrix}$. Ştiind că $A=B$ determinaţi $x,y,a,b,c\in\mathbb{R}$.

LIBRIS We know books

2 OPERAŢII CU MATRICE

Breviar teoretic

- Dacă $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, matricea $C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C=(a_{ij}+b_{ij})$ se numeşte **suma** matricelor A şi B. Suma matricelor A şi B se notează $A+B$.

Proprietăţile adunării:

Adunarea matricelor este asociativă: $(A+B)+C=A+(B+C)$, $\forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Matricea nulă $O_{m,n}$ este element neutru pentru adunare: $A+O_{m,n}=O_{m,n}+A$, $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Matricea $-A=(-a_{ij})$ se numeşte **opusa** matricei A şi are proprietatea:

$A+(-A)=(-A)+A=O_{m,n}$.

Înmulţirea unei matrice cu un număr

Fie $\alpha \in \mathbb{C}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$. Matricea $\alpha A=(\alpha\, a_{ij})$ se numeşte produsul matricei A cu numărul α.

Înmulţirea matricelor

- Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{m,p}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$. Matricea $C=(c_{ik}), C \in M_{m,p}(\mathbb{C})$, cu $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

Proprietăţile înmulţirii:

- Înmulţirea este asociativă:

  $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{C})$.

  Matricea unitate (identitate) $I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$, este element neutru:

  $A\cdot I_n=I_n\cdot A=A$, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$.

Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A=(a_{ij})$, matricea ${}^tA$, obţinută din matricea A prin schimbarea liniilor în coloane şi a coloanelor în linii se numeşte **transpusa** matricei A.

Au loc relaţiile:

- ${}^t(A+B)={}^tA+{}^tB$
- ${}^t(A-B)={}^tA-{}^tB$
- ${}^t(A\cdot B)={}^tB\cdot{}^tA$
- ${}^t({}^tA)=A$

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- Se defineşte $A^0=I_n$, $A^1=A$, $A^2=A\cdot A$.

  Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte matricea $A^n=A^{n-1}\cdot A$, numită puterea n a matricei A.

- Au loc relaţiile, $\forall m, n, p \in \mathbb{N}$:
  - $A^m\cdot A^n=A^{m+n}$,
  - $(A^m)^p=A^{mp}=(A^p)^m$.

Dacă $A \in M_2(\mathbb{C})$, $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, are loc relaţia: $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$;

(relaţîa Hamilton-Cayley).

LIBRIS We know books

1. Să se calculeze $A+B$ și $A-B$ dacă:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$. b) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

Soluție

a) Fie $A+B=C$. Matricea C este de tipul $(2,3)$. Rezultă că $C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\end{pmatrix}$, unde

$c_{11}=a_{11}+b_{11}=3+1=4$; $c_{12}=a_{12}+b_{12}=2+(-1)=1$; $c_{13}=a_{13}+b_{13}=-1+2=1$;

$c_{21}=a_{21}+b_{21}=4+0=4$; $c_{22}=a_{22}+b_{22}=3+(-2)=1$; $c_{23}=a_{23}+b_{23}=0+(-1)=-1$.

Așadar $C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 4 & 1 & -1\end{pmatrix}$. b) Dacă $A-B=D=\begin{pmatrix}d_{11} & d_{12}\\ d_{21} & d_{22}\\ d_{31} & d_{33}\end{pmatrix}$ se obține că:

$d_{11}=a_{11}-b_{11}=2-0=2$, $d_{12}=a_{12}-b_{12}=-1+2=1$, $d_{21}=a_{21}-b_{21}=3-0=3$,

$d_{22}=a_{22}-b_{22}=0-1=-1$,

$d_{31}=a_{31}-b_{31}=0-(-1)=1$, $d_{32}=a_{32}-b_{32}=1-(-2)=3$. Se obține $D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

2. Să se calculeze $(A+B)+C$ și $A+(B+C)$ pentru $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}$.

Soluție Avem succesiv: $(A+B)+C=\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+1 & 1+2\\ 2+4 & 0+3\end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4-1 & 3+2\\ 6+3 & 3-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 9 & 1\end{pmatrix}$.

Analog: $A+(B+C)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-1 & 2+2\\ 4+3 & 3-2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 4\\ 7 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 9 & 1\end{pmatrix}$.

3. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze $2A$, $-4B$ și $3(A+2B)$.

b) Să se determine matricea $X\in M_{2,3}(\mathbb{R})$, dacă $2X+3A=4B$.

Soluție

a) $2A=2\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 6 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $-4B=-4\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -12 & 0\\ -4 & 4 & -4\end{pmatrix}$ și

LIBRIS We know books

$3\cdot(A+2B)=3A+6B=3\cdot\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&0&-1\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}2&3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-3&3\\9&0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&18&0\\6&-6&6\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}18&15&3\\15&-6&3\end{pmatrix}$. b) Deoarece $3A=\begin{pmatrix}6&-3&3\\9&0&-3\end{pmatrix}$ şi $4B=\begin{pmatrix}8&12&0\\4&-4&4\end{pmatrix}$ rezultă că

$2X+\begin{pmatrix}6&-3&2\\9&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&12&0\\4&-4&4\end{pmatrix}$ sau $2X=\begin{pmatrix}8&12&0\\4&-4&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-3&2\\9&0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&15&-2\\-5&-4&7\end{pmatrix}$.

Aşadar $X=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2&15&-2\\-5&-4&7\end{pmatrix}$.

4. Să se determine numerele $x, y\in\mathbb{R}$ din egalitatea matriceală:

$2\begin{pmatrix}2x-y&2\\x+y&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}x&2+x\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&13\\10&15\end{pmatrix}$.

Soluţie Se obţine succesiv: $\begin{pmatrix}4x-2y&4\\2x+2y&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3x&6+3x\\6&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&13\\10&15\end{pmatrix}$. După efectuarea adunării de matrice, rezultă egalitatea $\begin{pmatrix}7x-2y&10+3x\\2x+2y+6&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&13\\10&15\end{pmatrix}$. Se obţine că $10+3x=13$, $7x-2y=5$ cu soluţiile $x=1$, $y=1$.

5. Să se determine matricele $A, B\in M_2(\mathbb{R})$ dacă $\begin{cases}A+2B=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\\2A+B=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}\end{cases}$.

Soluţie

Înmulţim a doua inegalitate cu -2 şi apoi adunăm egalităţile obţinute. Rezultă că

$\begin{cases}A+2B=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\\-4A-2B=\begin{pmatrix}-6&-8\\-2&-6\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow -3A=\begin{pmatrix}3&2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&-8\\-2&-6\end{pmatrix}\Rightarrow -3A=\begin{pmatrix}-3&-6\\2&-3\end{pmatrix}$, deci $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

Înlocuind A în a doua ecuaţie a sistemului obţinem: $2\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+B=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}$. Astfel,

$B=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$.

6. Să se calculeze $A\cdot B$ şi $B\cdot A$, în cazurile:

a) $A=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$; b) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}$; c) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Soluţie

a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2&2\cdot1+1\cdot1\\0\cdot1+1\cdot2&0\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$.

$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot0&1\cdot1+1\cdot1\\2\cdot2+1\cdot0&2\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\4&3\end{pmatrix}$.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0&3\cdot1+1\cdot1+1\cdot1\\1\cdot1+2\cdot(-1)+1\cdot0&1\cdot1+2\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5\\-1&4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

$B\cdot A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+1\cdot1&1\cdot1+1\cdot2&1\cdot1+1\cdot1\\-1\cdot3+1\cdot1&-1\cdot1+1\cdot2&-1\cdot1+1\cdot1\\0\cdot3+1\cdot1&0\cdot1+1\cdot2&0\cdot1+1\cdot1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}4&3&2\\-2&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.

7. Să se determine $x\in\mathbb{R}$ ştiind că $\begin{pmatrix}1&2+x\\x&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\4&5\end{pmatrix}$.

Soluţie

După efectuarea înmulţirii obţinem: $\begin{pmatrix}1\cdot2+1\cdot(x+2)&3+1\cdot(2+x)\\x\cdot2+2\cdot1&x\cdot3+2\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\4&5\end{pmatrix}$ sau

$\begin{pmatrix}x+4&x+5\\2x+2&3x+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&6\\4&5\end{pmatrix}$. Din ecuaţia $x+4=5$ rezultă că $x=1$.

8. Se dau matricele: $A=\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1&2\\0&-1\end{pmatrix}$. Calculaţi:

a) ${}^tA+{}^tB$; b) ${}^tA\cdot B+A\cdot{}^tB$; c) $A\cdot(B+C)$; d) A^2-3B^2.

Soluţie

a) ${}^tA=\begin{pmatrix}3&4\\5&4\end{pmatrix}$, ${}^tB=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$, ${}^tA+{}^tB=\begin{pmatrix}3&4\\5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\5&7\end{pmatrix}$.

b) ${}^tA\cdot B+A\cdot{}^tB=\begin{pmatrix}3&4\\5&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&12\\14&12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6&18\\8&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&30\\22&28\end{pmatrix}$.

c) $A\cdot(B+C)=\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-1&0+2\\1+0&3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&16\\8&16\end{pmatrix}$.

d) $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&5\\4&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot3+5\cdot4&3\cdot5+5\cdot4\\4\cdot3+4\cdot4&4\cdot5+4\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&35\\28&36\end{pmatrix}$.

$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\5&9\end{pmatrix}$.

Rezultă că $A^2+3B^2=\begin{pmatrix}29&35\\28&36\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}4&0\\5&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29&35\\28&36\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&0\\15&27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&35\\13&9\end{pmatrix}$.

9. Se consideră $A\in M_2(\mathbb{R})$, $A=\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$.

a) Să se calculeze A^2 şi A^3. b) Să se determine A^n, $n\in\mathbb{N}$.